Izabrani zadaci za vježbu (iz lekcija "Krive u prostoru" i "Dužina luka krive i prirodna parametrizacija krive")

Derivacija. Oznake za derivaciju

Reparametriziranu funkciju deriviramo ovako:

$$(\vec{r}[t(s)])' = \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \vec{r}_t' \cdot t_s'.$$

Derivacija vektorske funkcije realne varijable po invarijantnom (prirodnom) parametru označava se crticom, dakle:

$$\vec{r}\,' = \frac{d\vec{r}}{ds},$$

a po općem parametru točkicom, dakle:

$$\dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Graf krivulje (odnosno krivulja) ponekad se zadaje kao presjek dviju ploha:

$$F(x, y, z) = 0, \qquad G(x, y, z) = 0.$$

Zadaci:

52. a) Krivulja $\alpha : \mathbf{R} \to E^3$ zadana je svojom vektorskom jednadžbom:

$$\vec{r} = u\vec{i} + u^2\vec{j}.$$

Skicirajte graf te krivulje.

b) Krivulja $\alpha : \mathbf{R} \to E^3$ zadana je sa:

$$\vec{r} = t\vec{i} + t\vec{j}.$$

Skicirajte graf te krivulje.

c) Zatvorena krivulja $\alpha : [0,2\pi] \to E^3$ zadana je svojom vektorskom jednadžbom:

$$\vec{r}(t) = a\cos t\,\vec{i} + b\sin t\,\vec{j}, \qquad t \in [0,2\pi], \qquad a > 0, \qquad b > 0.$$

Skicirajte graf te krivulje.

Definicija: Diferencijabilno preslikavanje $\alpha : [a, b] \to E^3$ za koje je $\alpha(a) = \alpha(b)$ zovemo *zatvorenom krivuljom.*

a) Usporedimo li zadanu jednadžbu s

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

izlazi da je $x = u$, $y = u^2$, $z = 0$, pa eliminiravši parametar u dobijamo $y = x^2$, $z = 0$. Krivulja je parabola.

b) Analognom usporedbom izlazi:

$$x = t,\ y = t,\ z = 0.$$

Krivulja je pravac $y = x,\ z = 0$.

c) Imamo:

$$x = a\cos t, \qquad y = b\sin t, \qquad z = 0.$$

Eliminacijom parametra t izlazi:

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad z = 0.$$

Krivulja je, dakle, elipsa.

53. a) Točke grafa neke krivulje u XOY ravnini zadane su sa $y = f(x)$, $x \in \mathbf{R}$. Kako glasi vektorska i parametarska jednadžba te krivulje?

b) U ravnini XOY zadana je elipsa:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Napišite vektorsku i parametarske jednadžbe te krivulje.

a) Krivulju u ravnini XOY zadanu funkcijom $y = f(x)$, $x \in \mathbf{R}$ zadajemo parametarskim jednadžbama ovako:

$$x = t, \qquad y = f(t), \qquad z = 0, \qquad t \in \mathbf{R},$$

a vektorska jednadžba glasi:

$$\vec{r}(t) = t\vec{i} + f(t)\vec{j}.$$

b) Parametarske jednadžbe elipse glase ovako:

$$x = a\cos t, \qquad y = b\sin t, \qquad z = 0, \qquad t \in [0, 2\pi], \qquad a > 0, \qquad b > 0,$$

a vektorska jednadžba:

$$\vec{r}(t) = a\cos t\,\vec{i} + b\sin t\,\vec{j}, \qquad t \in [0, 2\pi], \qquad a > 0, \qquad b > 0.$$

Vektorsku jednadžbu krivulje, ovdje elipse, ponekad pišemo i ovako:

$$\vec{r}(t) = \{a\cos t,\ b\sin t,\ 0\}.$$

54. Kružna zavojnica (ili obična cilindrična spirala) je preslikavanje

$$\alpha : \mathbf{R} \to E^3$$

zadano sa:

$$\vec{r}(t) = a\cos t\,\vec{i} + a\sin t\,\vec{j} + bt\vec{k}, \qquad t \in \mathbf{R}, \qquad a > 0, \qquad b > 0.$$

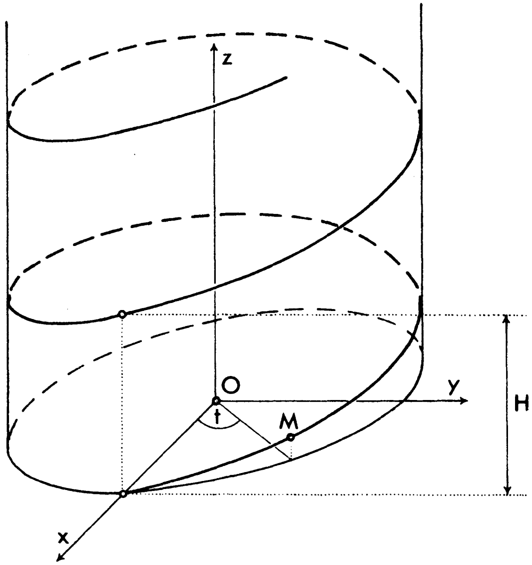
Skicirajte graf te krivulje (sl. 13).

Eliminiramo li iz parametarskih jednadžbi kružne zavojnice: $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$, parametar t, vidimo da ona leži na cilindru $x^2 + y^2 = a^2$ radiusa a i kojemu je os os OZ. $z = bt$ kazuje da je »brzina« b dizanja bilo koje točke kružne zavojnice od baze valjka konstantna. Udaljenost z od baze pri obilaženju valjka raste proporcionalno središnjem kutu osnovnog kruga.

Veličina $H = 2\pi\,|b|$ zove se *hod* kružne zavojnice.

Krivulja ima još naziv *heliks*.

(Vidi zad. 58, 62, 97, 99, 118, 151, 163, 197).



Sl. 13.

55. Zadana je Vivijanieva krivulja:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \qquad x^2 + y^2 = ax.$$

Napisati vektorsku i parametarske jednadžbe te krivulje.
Vivijanieva krivulja je presjek sfere i cilindra:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \qquad \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}.$$

Neka je parametar t kao na slici 14, tj. $\sphericalangle\ OTT'$.

Imamo nadalje: $\overline{OT} = \overline{OA} = a$,
a kako su trokuti OAT' i OTT' sukladni (stranica OT' im je zajednička), to je $\sphericalangle\ OAT'$ jednak parametru t. Tada je

$OT' = a\sin t$, pa je:
$x = OT'\cos(90° - t) = a\sin^2 t,$
$y = OT'\sin(90° - t) = a\sin T\cos t,$
$z = a\cos t.$

Krivulja, dakle, ima parametarske jednadžbe:

$x = a\sin^2 t,$
$y = a\sin t\cos t,$
$z = a\cos t,$ gdje je $t \in [0, 2\pi]$, $[0, 2\pi] \to E^3$,

odnosno vektorsku jednadžbu:

$$\vec{r} = a\sin^2 t\,\vec{i} + a\sin t\,\cos t\,\vec{j} + a\cos t\,\vec{k}, \qquad t \in [0, 2\pi],$$

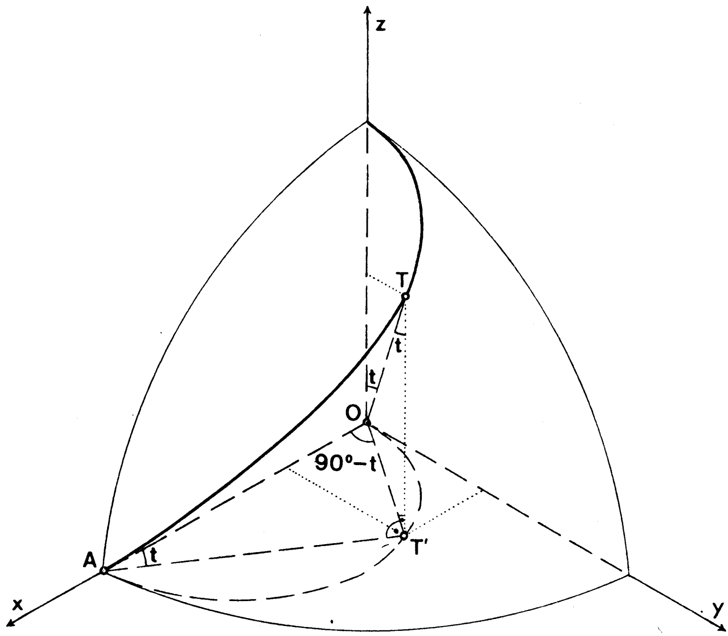
ili kraće:

$$\vec{r} = \{a\sin^2 t, a\sin t\cos t, a\cos t\}, \qquad t \in [0, 2\pi].$$

Provjerite sami da je:

$$\vec{r} = \left\{\frac{a}{2}(1+\cos t), \quad \frac{a}{2}\sin t, \quad a\sin\frac{t}{2}\right\}, \qquad t \in [0, 4\pi],$$

također jedna parametrizacija Vivijanieve krivulje.



Sl. 14.

56. Dokazati da graf zatvorene krivulje $\alpha : [0, \pi] \to E^3$ zadane sa:

$$x = \sin 2\phi, \qquad y = 1 - \cos 2\phi, \qquad z = 2\cos\phi$$

leži na sferi i jest presjek paraboličkog i kružnog valjka. Napisati vektorsku jednadžbu krivulje.

Vektorska jednadžba krivulje glasi:

$$\vec{r} = \{\sin 2\phi, \quad 1 - \cos 2\phi, \quad 2\cos\phi\}.$$

Dokažimo da krivulja leži na sferi. Imamo:

$$x^2 + y^2 + z^2 = \sin^2 2\phi + (1 - \cos 2\phi)^2 + 4\cos^2\phi =$$
$$= 2 - 2\cos 2\phi + 4\cos^2\phi = 2 + 2\cos^2\phi + 2\sin^2\phi = 4.$$

Krivulja, dakle, leži na sferi $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. Da bismo krivulju napisali kao presjek dvaju valjaka, treba eliminirati parametar ϕ.

Iz prve dvije jednadžbe imamo:

$$x^2 + (y-1)^2 = \sin^2 2\phi + \cos^2 2\phi = 1.$$

Iz druge dvije jednadžbe imamo:

$$y = 2\sin^2\phi, \qquad z = 2\cos\phi, \qquad \text{pa je}$$

$$\frac{y}{2} + \left(\frac{z}{2}\right)^2 = \sin^2\phi + \cos^2\phi = 1.$$

Krivulja je, dakle, presjek kružnog:

$x^2 + (y-1)^2 = 1$ i paraboličkog valjka:

$$\frac{y}{2} + \left(\frac{z}{2}\right)^2 = 1.$$

57. Zadana je krivulja $\alpha : \mathbf{R} \to E^3$ sa:

$$x = e^t \cos t, \qquad y = e^t \sin t, \qquad z = 2t.$$

1°. Naći projekciju grafa krivulje na ravninu XOY.

2°. Napisati jednadžbu krivulje kao presjek dviju ploha.

1°. Parametarska jednadžba projekcije te krivulje na ravninu XOY glasi:

$$x = e^t \cos t, \qquad y = e^t \sin t.$$

Eliminirajmo parametar t (odnosno pokušajmo eliminirati):

$$x^2 + y^2 = e^{2t}.$$

U polarnom sustavu ova jednadžba glasi:

$$r = e^t,$$

gdje t ima značenje polarnog kuta.

Projekcija zadane krivulje je logaritamska spirala.

2°. Treba eliminirati parametar t.

Iz prve dvije jednadžbe imamo:

$$x^2 + y^2 = e^{2t}, \qquad \frac{y}{x} = \operatorname{tg} t,$$

a iz treće jednadžbe: $t = \dfrac{z}{2}$.

Zadana krivulja je prema tome presjek ovih dviju ploha:

$$x^2 + y^2 = e^z$$

$$y = x \operatorname{tg} \frac{z}{2}.$$

Iz ovog oblika također možemo naći jednadžbu projekcije krivulje na ravninu XOY iz 1°.

Eliminirajmo z iz navedene dvije jednadžbe.

Iz prve imamo:

$z = \ln(x^2 + y^2)$.

Uvrstimo li ovo u drugu jednadžbu imamo:

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \ln \sqrt{x^2 + y^2},$$

odnosno:

$$\ln \sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x},$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = e^{\operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}}.$$

U polarnom sustavu jednadžba ove projekcije glasi:

$$r = e^t,$$

kao na prvi način u 1°.

58. Zadana je krivulja (spirala) $\alpha : \mathbf{R} \to E^3$ sa:

$$x = a \cos t \qquad y = a \sin t \qquad z = bt, \qquad a > 0, \qquad b > 0.$$

1°. Naći projekcije grafa krivulje na koordinatne ravnine.

2°. Napisati jednadžbu krivulje kao presjek dviju ploha.

1°. Projekcija na koordinatnu ravninu XOY ima parametarsku jednadžbu:

$x = a \cos t$

$y = a \sin t,$

a eliminiravši parametar t implicitni oblik jednadžbe projekcije glasi:

$x^2 + y^2 = a^2$.

Projekcija na koordinatnu ravninu YOZ ima jednadžbu:

$y = a \sin t$

$z = bt,$

odnosno:

$$y = a \sin \frac{z}{b}.$$

Projekcija na koordinatnu ravninu XOZ ima jednadžbu:

$$x = a \cos t$$
$$z = bt,$$

odnosno:

$$x = a \cos \frac{z}{b}.$$

2°. Eliminirajmo parametar t:

$$x^2+y^2=a^2, \qquad y=x\operatorname{tg} t, \qquad t=\frac{z}{b}.$$

Jednadžba krivulje prema tome glasi:

$$x^2+y^2=a^2$$

$$z=b\operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{y}{x}.$$

Iz ovog oblika možemo naći također projekciju grafa krivulje na koordinatne ravnine XOY, YOZ, XOZ tako da iz navedene dvije jednadžbe eliminiramo redom z, pa x, pa y.

Eliminirajmo z:

Projekcija na ravninu XOY ima jednadžbu:

$$x^2+y^2=a^2.$$

Eliminirajmo x:

Iz druge jednadžbe je: $x=y\operatorname{ctg}\frac{z}{b}$, što uvršteno u prvu jednadžbu daje traženu projekciju na ravninu YOZ:

$$y^2\left(\operatorname{ctg}^2\frac{z}{b}+1\right)=a^2,$$

$$y^2=a^2\sin^2\frac{z}{b},$$

$$y=a\sin\frac{z}{b}.$$

Na kraju eliminirajmo y. U prvu jednadžbu uvrstimo $y=x\operatorname{tg}\frac{z}{b}$:

$$x^2\left(\operatorname{tg}^2\frac{z}{b}+1\right)=a^2,$$

$$x^2=a^2\cos^2\frac{z}{b},$$

$$x=a\cos\frac{z}{b},$$

što predstavlja jednadžbu projekcije zadane krivulje na ravninu XOZ.

59. Naći duljinu luka krivulje $\alpha:\left[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to E^3$:

$\vec{r}=\{\sin^2 t, \sin t\cos t, \ln\cos t\}$

od $t=0$ do $t=t$. (Ovo znači: od točke u kojoj je $t=0$ do točke u kojoj je $t=t$. Analogno u daljnjim zadacima). Imamo:

$$\dot{x}=2\sin t\cos t=\sin 2t,$$

$$\dot{y}=\cos^2 t-\sin^2 t=\cos 2t, \qquad \dot{z}=-\frac{\sin t}{\cos t}=-\operatorname{tg} t.$$

Tada je:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = \sin^2 2t + \cos^2 2t + \mathrm{tg}^2 t = 1 + \mathrm{tg}^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}.$$

Duljina luka jest:

$$s = \int_0^t \frac{1}{\cos t}\,\mathrm{d}t = \ln \mathrm{tg}\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\Bigg|_0^t.$$

$$s = \ln \mathrm{tg}\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\right).$$

60. Naći duljinu luka krivulje:

$x^2 = 3y,\ 2xy = 9z$ od točke $(0,0,0)$ do točke $(3,3,2)$.

Ovdje je krivulja zadana kao presjek dviju ploha. Pređimo na parametarski oblik pa uzmimo:

$$x = 3t,$$

onda je $y = 3t^2$, $z = 2t^3$,
tako da je taj presjek graf krivulje $\alpha : \mathbf{R} \to E^3$ koja je zadana sa:

$$\vec{r} = \{3t,\ 3t^2,\ 2t^3\}.$$

Nadalje je:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = 9 + 36t^2 + 36t^4 = 9(1 + 4t^2 + 4t^4) = 9(1 + 2t^2)^2.$$

Tada je duljina luka:

$$s = 3\int_0^1 (1 + 2t^2)\,\mathrm{d}t = 3\left(t + \frac{2}{3}t^3\right)\Bigg|_0^1 = 3\left(1 + \frac{2}{3}\right) = 3 \cdot \frac{5}{3} = 5.$$

61. Odrediti duljinu luka krivulje $\alpha : \mathbf{R} \to E^3$:
$\vec{r}(t) = t\vec{a} + (1 - t)\vec{b}$ od $t_0 = 0$ do t, gdje su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ konstantni vektori.

Duljina luka glasi:

$$s = \int_{t_0}^{t} |\dot{\vec{r}}(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Tada je zbog konstantnosti $\vec{a}$ i $\vec{b}$:

$$|\dot{\vec{r}}(t)| = \sqrt{(\dot{\vec{r}})^2} = \sqrt{(\vec{a} - \vec{b})^2} = |\vec{a} - \vec{b}|,$$

pa imamo:

$$s = \int_0^t |\vec{a} - \vec{b}|\,\mathrm{d}t = |\vec{a} - \vec{b}| \int_0^t \mathrm{d}t = |\vec{a} - \vec{b}|\,t.$$

62. Običnu cilindričnu spiralu $\alpha:\mathbf{R}\to E^3$ zadanu s:

$$\vec{r}(t)=\{a\cos t, a\sin t, bt\}, \qquad a,b>0$$

parametrizirati duljinom luka.

Imamo:

$$\dot{\vec{r}}(t)=\{-a\sin t, a\cos t, b\},$$
$$|\dot{\vec{r}}|^2=a^2+b^2.$$

Tada je, jer je u točki $x=a$ $t=0$:

$$s(t)=\int_0^t|\dot{\vec{r}}|\,\mathrm{d}t=\int_0^t\sqrt{a^2+b^2}\,\mathrm{d}t=\sqrt{a^2+b^2}\int_0^t\mathrm{d}t.$$

Dakle:

$$s(t)=\sqrt{a^2+b^2}\quad t.$$

Inverzna funkcija jest:

$$t=t(s)=\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

pa cilindrična spirala ima jednadžbu:

$$\vec{r}=\vec{r}(s)=\left\{a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}}\right\}.$$

(Vidi zad. 54, 58, 99, 101, 164, 194.)

63. Naći projekciju na ravninu XOY grafa krivulje koja nastaje kao presjek hiperboličkog parabolida $z=x^2-y^2$ i ravnine $x+y-z-1=0$.

64. Naći projekciju na ravninu YOZ grafa krivulje koja nastaje kao presjek rotacionog paraboloida $x=y^2+z^2$ i ravnine $x-2y+4z-4=0$.

65. Dokazati da projekcija na ravninu XOY grafa krivulje koja je presjek eliptičkog paraboloida $z=x^2+2y^2$ i ravnine $2x-4y+z-1=0$ jest elipsa. Naći veliku i malu os te elipse.

66. Naći projekciju na ravninu XOZ grafa krivulja koja je presjek stošca $y^2=xz$ i ravnine $x-y+z+1=0$.

67. Pokazati da

$$x=a\sin\theta\cos\phi, \qquad y=a\sin\theta\sin\phi, \qquad z=a\cos\theta,$$

gdje je $\theta=\theta(\phi)$ jest krivulja $\alpha:[0,2\pi]\to E^3$ koje graf leži na kugli.

68. Pokazati da graf krivulje $\alpha:[0,2\pi]\to E^3$:

$$x=a\sin^2 t, \qquad y=b\sin t\cos t, \qquad z=c\cos t$$

leži na elipsoidu.

69. Pokazati da graf krivulje $\alpha : \mathbf{R} \to E^3$:

$$x = \frac{t}{1+t^2+t^4}, \quad y = \frac{t^2}{1+t^2+t^4}, \quad z = \frac{t^3}{1+t^2+t^4}$$

leži na kugli sa središtem u točki $S\left(0, \frac{1}{2}, 0\right)$ i polumjerom $R = \frac{1}{2}$.

70. Pokazati da graf krivulje $\alpha : \mathbf{R} \to E^3$:

$$x = t\cos t, \qquad y = t\sin t, \qquad z = ct$$

leži na kružnom stošcu.

71. Pokazati da graf krivulje $\alpha : \mathbf{R} \to E^3$:

$$x = at\cos t, \qquad y = at\sin t, \qquad z = \frac{a^2 t^2}{2p}$$

leži na rotacionom paraboloidu i da je njena projekcija na ravninu XOY Arhimedova spirala.

72. Naći projekciju grafa krivulje $\alpha : \mathbf{R} \to E^3$:

$$x = t, \qquad y = t^2, \qquad z = t^3$$

na koordinatne ravnine.

73. Pokazati da graf krivulje $\alpha : \mathbf{R} \to E^3$:

$$x = a\operatorname{ch} t, \qquad y = a\operatorname{sh} t, \qquad z = ct$$

leži u hiperboličkom valjku i naći njezine projekcije na koordinatne ravnine.

74. Pokazati da graf krivulje $\alpha : [0, 2\pi] \to E^3$

$$x = a\operatorname{tg} t, \qquad y = b\cos t, \qquad z = b\sin t$$

leži na hiperboličkom paraboloidu i naći projekcije njenog grafa na koordinatne ravnine.

75. Krivulju $\alpha : \mathbf{R} \to E^3$

$$x = t, \qquad y = t^2, \qquad z = e^t$$

predočiti kao presjek dviju ploha.

76. Pokazati da je graf krivulje $\alpha : [0, 2\pi] \to E^3$

$$\vec{r} = \{a\cos t, \quad a\sin t, \quad b\sin 2t\}$$

presjek kružnog valjka i hiperboličkog paraboloida.

77. Pokazati da se graf krivulje:

$$x^2 + z^2 = a^2, \qquad y^2 + z^2 = a^2$$

nalazi u dvije međusobno okomite ravnine.

78. Naći projekciju grafa krivulje:

$$z = x^2 + y^2, \qquad x + y + z = 1$$

(presjek ravnine i kružnog paraboloida) na koordinatnu ravninu XOY.

79. Naći duljinu luka krivulje $\alpha : \mathbf{R} \to E^3$:

$$\vec{r} = \left\{ t, \quad t^2, \quad \frac{2}{3} t^3 \right\},$$

od $t = 0$ do $t = 2$.

80. Naći duljinu luka krivulje $\alpha : \mathbf{R} \to E^3$:

$$\vec{r} = \{ e^t \cos t, \ e^t \sin t, \ e^t \}$$

od $t = 0$ do $t = t$.

81. Naći duljinu luka krivulje $\alpha : \mathbf{R} \to E^3$:

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad z = 4a \cos \frac{t}{2}$$

između njezina dva sjecišta s ravninom XOZ.

82. Naći duljinu luka krivulje

$$x^3 = 3a^2 y, \quad 2xz = a^2$$

među ravninama $y = \frac{a}{3}$, $y = 9a$.

83. Pokazati da zatvorena krivulja $\alpha : [0, \pi] \to E^3$:

$$x = \cos^3 t, \quad y = \sin^3 t, \quad z = \cos 2t$$

ima duljinu $s = 15$.

84. Naći duljinu luka krivulje $\alpha : \mathbf{R} \to E^3$:

$$x = a \operatorname{ch} t, \quad y = a \operatorname{sh} t, \quad z = at$$

među točkama 0 i t.

85. Naći duljinu luka krivulje $\alpha : \mathbf{R}^+ \to E^3$:

$$x = ct, \quad y = c\sqrt{2} \ln t, \quad z = \frac{c}{t}$$

među točkama $t = 1$, $t = 10$.

86. Zadana je krivulja $\alpha : \mathbf{R}^+ \to E^3$:

$$\vec{r} = \left\{ t + \frac{a^2}{t}, \quad t - \frac{a^2}{t}, \quad 2a \ln \frac{t}{\mathrm{a}} \right\}.$$

1°. Pokazati da je njezin graf presjek ploha

$$x^2 - y^2 = 4a^2 \ \text{ i } \ z = 2a^2 \ln \frac{x + y}{2a}.$$

2°. Pokazati da je duljina luka dane krivulje od točke na x-osi do proizvoljne točke proporcionalna s y-ordinatom te krivulje.

87. Naći izraz za ds krivulje u cilindričnim koordinatama.

88. Naći izraz za ds krivulje u sfernim koordinatama.

Rješenja

63. $x^2 - y^2 - x - y + 1 = 0$.

64. $y^2 + z^2 - 2y + 4z - 4 = 0$.

65. $a = 2,\ b = \sqrt{2}$.

66. $x^2 + z^2 + xz + 2x + 2z + 1 = 0$.

71. Krivulja leži na plohama: $x^2 + y^2 = 2pz$ (rotacioni paraboloid) i $\dfrac{y}{x} = \operatorname{tg} \dfrac{\sqrt{2pz}}{a}$; njena projekcija na ravninu XOY jest $r = a\phi$.

72. $y = x^2,\ z = x^3,\ y^3 = z^2$.

73. $x^2 - y^2 = a^2,\ x = a \operatorname{ch} \dfrac{z}{c},\ y = a \operatorname{sh} \dfrac{z}{c}$.

74. Krivulja leži na plohama: $y^2 + z^2 = b^2$ i $az = xy$ (hiperbolički paraboloid), $y^2 + z^2 = b^2$, $y^2(a^2 + x^2) = a^2 b^2,\ z^2(a^2 + x^2) = b^2 x^2$.

75. $y = x^2, \quad z = e^x$.

76. $x^2 + y^2 = a^2, \quad 2bxy = a^2 z$.

77. $x + y = 0, \quad x - y = 0$.

78. Projekcija je kružnica sa središtem $S = \left(-\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{1}{2}\right)$ i radiusom $r = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

79. $\dfrac{22}{3}$. **80.** $\sqrt{3}\,(e^t - 1)$. **81.** $8a\sqrt{2}$.

82. $9a$. **84.** $a\sqrt{2} \operatorname{sh} t$. **85.** $9{,}9\,c$. **87.** $ds^2 = dr^2 + r^2 d\phi^2 + dz^2$.

88. $ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\phi^2$.